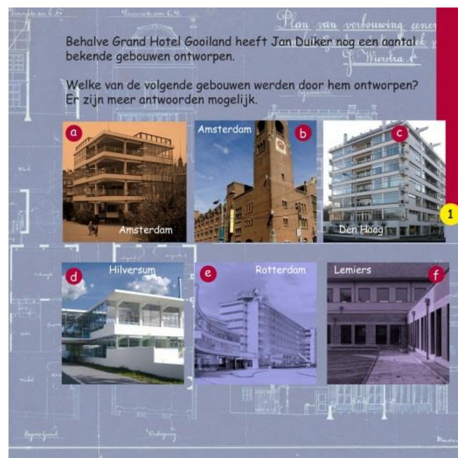
Wiskundewandeling in Grand Hotel Gooiland

ter gelegenheid van de 90e verjaardag van onze vereniging

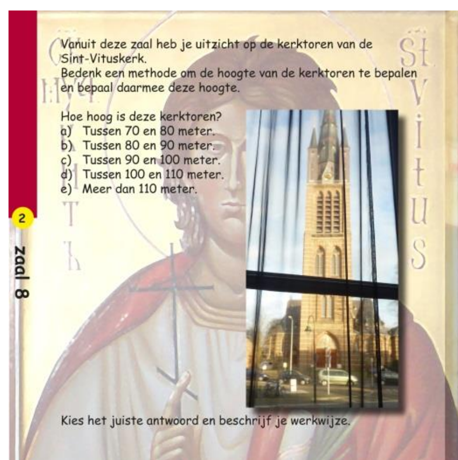


Al in het voorjaar van 2014 werden Peter en Joke benaderd door Lidy Wesker, lid van het bestuur. Het bestuur had de locatie voor het jubileum vastgesteld, het Grand Hotel Gooiland in Hilversum. Lidy vertelde vol enthousiasme over de fantastische en inspirerende omgeving waar het feest zou plaatsvinden. Bolspiegels op het plafond, spannende apparaten met raderen, strakke lijnen en geometrische vormen kenmerkend voor "het nieuwe bouwen". Daar moesten we als wiskundigen toch iets mee kunnen doen. Peter nam vervolgens contact op met Marcel en Ger, ter versterking. De locatie werd enkele keren bezocht en met een onderzoekende blik hebben we samen in een eerste brainstorm vragen bedacht waar ook wij geen antwoord op hadden. Het gebouw werd een tweede keer aan een nauwkeurige inspectie onderworpen en we lichtten de doopceel van architect Jan Duiker, met gebruik van internet en de annalen van het hotel. Een en ander leverde voldoende informatie op om vervolgens de wandeling, al mailend, te ontwerpen. Nadat helder was welke vragen er aan de orde gesteld zouden worden, is Ad van den Broek voorzien van de conceptvragen. Deze heeft, in enkele fasen, de opgaven met een prachtig ontwerp omgezet in het kleine boekje dat allen bij binnenkomst op 18 april 2015 ontvangen hebben. Een ontwerp zoals we dit ook kennen van de wiskundewandeling in Nijmegen van Leon van den Broek, zijn broer.

In dit artikel passeren de verschillende vragen en antwoorden de revue en vermelden we tevens opvallende inzendingen die we die dag mochten ontvangen. Zoals al bij het jubileum vermeld, kan over de uitslag niet gecorrespondeerd worden. Ook nu niet...



Vraag 1 toonde zes markante gebouwen en de bijbehorende steden. a) *De Openluchtschool in Amsterdam*, c) *De Nirwanaflat in Den Haag* en d) *Landgoed Zonnestraal in Hilversum* waren alle van de hand van Jan Duiker. De andere gebouwen, b) De Beurs van Berlage in Amsterdam, e) De Van Nellefabriek van Van der Vlugt in Rotterdam en f) De Abdij Sint Benedictusberg van Dom van der Laan in Lemiers, waren de afleiders. Hier was goed te constateren dat veel deelnemers beschikten over adequate architecturale kennis dan wel goedwerkende smartphones.



Vraag 2 vroeg naar de hoogte van de kerktoren van de tegenover Gooiland liggende Sint Vituskerk en een beschrijving van de gehanteerde methode. Het juiste antwoord was antwoord c) *Tussen 90 en 100 meter*. De toren is namelijk 98 meter hoog en de wijze waarop die hoogte berekend kan worden, bleek bij velen bekend. Niet dat dit steeds op dezelfde manier gebeurde. Een enkeling telde de lichte horizontale strepen op de toren, schatte de tussenliggende afstand en bepaalde op die wijze de hoogte. Een ander meldde dat hij gegokt had en een derde maakte melding van een hoogte waarbij de deuren (en een schatting van hun hoogte) als richtinggevend gehanteerd werden. Ook de methode waarbij vanaf twee plekken die 10 meter van elkaar verwijderd waren de hoeken van de horizontaal met de top van de toren gemeten werden (de NVvW had geodriehoeken meegeleverd in het handtasje-van-de-dag) mag niet onvermeld blijven. En uiteraard was er de houthakkersmethode waarbij gelijkvormigheid gebruikt werd.

In de hoek zie je een trap naar de entresol. Stel dat je bij het naar boven lopen slechts 1 of 2 treden tegelijkertijd mag nemen. Je kunt dan bijvoorbeeld volgens het schema 1-1-1-1-......... maar ook volgens het schema 1-2-1-2-2-....... de trap oplopen totdat je boven bent.

Op hoeveel verschillende manieren kun je dan naar boven lopen?
a) Tussen 200 en 300.
b) Tussen 300 en 500.
c) Tussen 500 en 700.
d) Tussen 700 en 900.
e) Tussen 900 en 1100.
f) Meer dan 1100.

Kies het juiste antwoord en licht je antwoord toe.

3 zaal 7

Vraag 3 vergde, behalve wiskundig inzicht, ook elementair tellen en voldoende rust en concentratie: er werd gevraagd naar de hoeveelheid verschillende manieren om via de trap vanuit zaal 7 naar de entresol te komen als je 1 of 2 treden tegelijkertijd mag nemen. Het is dan noodzakelijk om te weten dat die trap 15 treden (dat wil zeggen 15 'niveauverhogingen') bevat. Ook de laatste niveauverhoging waarbij de entresol betreden wordt, dient meegeteld te worden en dat leek niet door iedereen ingezien. Vervolgens kun je verder op meerdere manieren. We bespreken twee mogelijke aanpakken. Als eerste de mogelijkheid gebruik makend van de Fibonaccireeks. Het is van belang in te zien dat het aantal manieren, voor het beklimmen van een trap met n treden, kan worden afgeleid uit het aantal manieren voor een trap met n-1 en n-2 treden. Er geldt: $A(n)=A(n-1)+A(n-2)$ met $A(1)=1$ en $A(2)=2$, waarbij $A(n)$ staat voor het aantal manieren bij een trap met n treden. Een tweede mogelijkheid is het sommeren van de binomiaalgetallen ($\binom{15}{0}+\binom{14}{1}+\binom{13}{2}+\binom{12}{3}+\binom{11}{4}+\binom{10}{5}+\binom{9}{6}+\binom{8}{7}$). Uiteraard leveren beide methoden het exacte antwoord: 987. Dus antwoord e*) Tussen 900 en 1000* is het juiste. Het juiste antwoord werd weliswaar door veel mensen gekozen maar er waren maar weinig inzendingen die ook daadwerkelijk die 987 correct bepaald hadden. Kennelijk zijn er collega's die een goed gevoel hiervoor hebben (of werd hier de rekenmachine toch wel node gemist...).

In zaal 6 zijn om de zuilen prachtige verticale lampen gemonteerd. Architect Duiker heeft geprobeerd deze lampen via spiegels meerdere keren in beeld te laten komen. De totale hoeveelheid verticale lampen die je, direct of na spiegeling ziet, hangt af van de positie die je inneemt in de zaal.

Hoeveel lampen kun je, kijkend vanaf één positie, maximaal zien?

Licht je antwoord toe. Maak daarbij gebruik van de plattegrond op het antwoordblad.

4 zaal 6

Vraag 4 vroeg naar de maximale hoeveelheid zichtbare tl-buizen in 'spiegelzaal' 6. Dat juiste aantal is enigermate ambigue (afhankelijk van lichaamslengte, maar ook van de keuze van je kijkpositie, waardoor vele spiegelingen van spiegelingen van spiegelingen …. mogelijk zijn) . Vandaar dat we bij

de beoordeling een zekere marge hebben genomen: antwoorden uit de verzameling {58, 59, 60, 61, 62} mochten op een goedkeurende krul rekenen. Daarin slaagde echter slechts één groepje, dat op het antwoordenblad een mooie toelichting gaf van de opbouw van het antwoord 59.

5

Een architect die ook tot de Nieuwe Zakelijkheid behoort was Le Corbusier. Uit The ideas of Le Corbusier, New York 1981:

"Opnieuw werd ik getroffen door het ontbreken van een regel of wetmatigheid. Verbijsterd realiseerde ik me dat ik in een totale chaos werkte. Toen ontdekte ik voor mijn eigen gebruik de noodzaak van een regulerend instrument."

Dit regulerend instrument werd de Modulor waarin hij de Gulden Snede gebruikte. Als een recht lijnstuk in twee delen A en B verdeeld wordt zodat B/A = (A+B)/B dan is de verhouding B/A gelijk aan φ (ongeveer 1,618..). Dit getal φ, de Gulden Snede, kan ook gevonden worden als oplossing van de vergelijking $x^2 = x + 1$.

Welke expressie geeft niet de Gulden Snede φ?

a) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}}}$
b) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$
c) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}$
d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vraag 5 was een locatieloze vraag waarbij vier uitdrukkingen vermeld stonden en de opdracht was die expressie ertussenuit te halen die niet overeenkomt met de Gulden Snede. Dat was de formule a) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots\ldots}}}}$. Hier werd niet gevraagd naar een onderbouwing van het gekozen antwoord. Zo'n onderbouwing zou zich trouwens gebaseerd kunnen hebben op het inzicht dat antwoord d) inderdaad een oplossing van de gegeven vergelijking $x^2=x+1$ is, antwoord b) en c) ook uit de vergelijking zijn af te leiden maar antwoord a) daarentegen een oplossing is van de vergelijking $x^3=x+1$ en elk van de anderen niet. Los daarvan bleek deze vraag een van de eenvoudigste van deze wandeling.

6

Een Gulden Rechthoek is een rechthoek waarvan de zijden zich verhouden als de Gulden Snede, aangegeven door φ. Als van een Gulden Rechthoek een zo groot mogelijk vierkant afgesneden wordt, dan blijft een rechthoek over die weer een Gulden Rechthoek is. In onderstaande figuur zie je dat een aantal keren terug.

Je ziet tevens dat $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Ook voor $\frac{1}{\varphi^2}$ en $\frac{1}{\varphi^3}$ en $\frac{1}{\varphi^4}$ zijn lineaire uitdrukkingen in φ te vinden.
Voor $\frac{1}{\varphi^4}$ geldt:
a) $2\varphi - 3$
b) $-3\varphi + 5$
c) $5\varphi - 8$
d) $4\varphi - 6$
e) Geen van deze

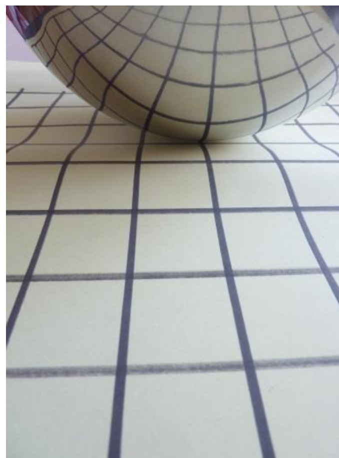
Vraag 6 handelde ook over de Gulden Snede en had lineaire uitdrukkingen voor $\frac{1}{\varphi^4}$ als onderwerp.

Aan de hand van de afgebeelde Gulden Rechthoek was in te zien dat $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Dat werd ook vermeld in de opgave. Gebruik van deze vergelijking in stambreuken met opeenvolgende machten van φ leidde vrij snel tot het antwoord $-3\varphi + 5$, zijnde optie b. Veel inzenders deden deze algebraïsche exercitie ook op hun vrije zaterdag feilloos: circa de helft van de deelnemers gaf hier een correct antwoord.

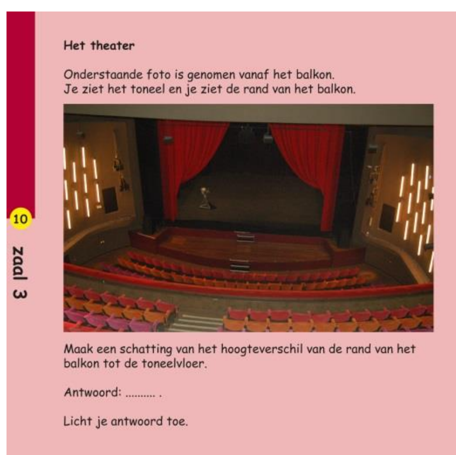
Vraag 7 was gebaseerd op een afbeelding die terug te vinden is in de geschriften van Le Corbusier. Ook hier was 'slechts' de architecturale achtergrond van de locatie inspiratie voor het item. Op voorhand hebben we als ontwerpers nog wel wat gepuzzeld om een eenduidige vraag rond de tekening te ontwerpen. Uiteindelijk zijn we daar, zo vinden we zelf althans, wel in geslaagd. Op basis van het (gegeven) feit dat er lijnstukken in de tekening zijn aan te treffen die zich verhouden als 1:2:3:4:5 en het gegeven dat de kleinste lengte in de betreffende lijnstukken gelijk is aan 10 meter, is de oppervlakte van het vierkant te berekenen. Die is *2000* m^2, antwoord a). Ook hier was een toelichting gevraagd. Dit bleek met een p-waarde van 71 de eenvoudigste opgave van de hele wandeling alhoewel bij velen de toelichting ontbrak. Daar waar een toelichting gegeven werd, was niet altijd te zien of men de gegeven verhouding 1:2:3:4:5 ook gehanteerd had maar gezien het gevonden correcte antwoord kan het niet anders dan dat dit (al dan niet bewust) in de onderliggende redenering moet zijn meegenomen.

Vraag 8 moet een fraai beeld hebben opgeleverd: daarbij werd gevraagd om na te denken over het spiegelbeeld in een bolvormige spiegellamp van een niet recht onder de spiegel liggende waarnemer. Het vermoeden bestaat dat veel deelnemers het antwoord op empirische wijze bepaald hebben en dus languit op het tapijt in het midden van zaal 2 zijn gaan liggen en zich vervolgens naar een zijkant hebben gewenteld. Het wachten is op YouTube-filmpjes van andere feestgangers; we houden ons aanbevolen. Antwoord op de vraag (waar gelukkig geen toelichting gevraagd werd) is antwoord a) *heel licht nauwelijks zichtbaar gebogen op de foto te zien zijn*. Slechts twee van de groepjes kozen voor deze optie dus de vraag is gerechtvaardigd wat men dan in meerderheid al liggend denkt te hebben waargenomen...





Vraag 9 ging nog even door over de bolvormige spiegel. Degenen die zich bij vraag 8 over dit fenomeen bogen, mochten vervolgens nadenken over een wat abstractere invulling door, op het antwoordenblad, het spiegelbeeld op de spiegelbol te tekenen van een gegeven rooster. Een (min of meer) juiste tekening (want we hadden afgesproken hier niet al te streng te zijn) heeft deze vraag echter niet opgeleverd. Bijgaand een foto van een mogelijke spiegelweergave.



Vraag 10 betrof het maken van een schatting van het hoogteverschil tussen balkon en toneelvloer. De vraag behelsde een open antwoord plus, ook hier weer, het geven van een toelichting. Op grond van onze eigen metingen van diezelfde ochtend hadden we besloten het juiste antwoord, zijnde 4,10 meter, van een marge van 20 cm te voorzien. Een groepje slaagde erin een antwoord te geven dat binnen de acceptatiegrenzen viel. De toelichting 5/3x5/2 met 'zoveel x een deur' als opmerking bij 5/3 en 'deur' bij 5/2 liep niet over van duidelijkheid; we vermoeden dat de auteurs de hoogte van een - welke? - deur geschat hebben en die vervolgens virtueel afgepast hebben op de gevraagde hoogte. Bijzonder daarbij wellicht is dat men schatten in niet-decimale breukvorm doet. De andere antwoorden liepen nogal fors uiteen: we scoorden antwoorden van 2 meter tot 17 meter. Pythagoras leidde in dit geval vaak tot wel erg grote afwijkingen van de juiste maten.

Het theater

11

zaal 3

Op de foto zie je goed het voorste deel van het podium: de orkestbak. De voorste rand van de orkestbak is (bij benadering) cirkelvormig.

Hoe groot is de straal van deze cirkel?
a) Minder dan 10 meter.
b) Tussen 10 en 12 meter.
c) Tussen 12 en 14 meter.
d) Tussen 14 en 16 meter.
e) Meer dan 16 meter.

Kies het juiste antwoord en licht je antwoord toe.

Vraag 11 ging eveneens over de theaterzaal en had als insteek de straal van de orkestbakcirkel te bepalen. Onze waarnemingen/metingen van diezelfde ochtend leidden tot een straal van 14,3 meter (gebaseerd op een podiumbreedte van 10 meter en een gemeten 'cirkelsegmenthoogte' van 0,9 meter). Het juiste antwoord was daarmee antwoord d) *Tussen 14 en 16 meter*. Ook hier werd weer een toelichting gevraagd. Circa 25% van de deelnemers gaf dit antwoord maar de meeste antwoorden waren niet voorzien van een bijbehorende redenering. Een enkeling liep stiekem over de rand van het podium, om zo een schatting te maken. Anderen gaven redeneringen die niet uitblonken in helderheid...

In deze ruimte staan verschillende krukken. Als je zo'n kruk plat neerlegt, zoals op de foto, kun je deze "ronddraaien" over de vloer.

12

zaal 7

Als je de kruk nu ronddraait, zal het tafelblad een cirkel op de vloer beschrijven. De omtrek van deze cirkel is:
a) tussen 5 en 8 keer de hoogte van de kruk.
b) tussen 8 en 11 keer de hoogte van de kruk.
c) tussen 11 en 14 keer de hoogte van de kruk.
d) tussen 14 en 17 keer de hoogte van de kruk.
e) meer dan 17 keer de hoogte van de kruk.

Kies het juiste antwoord en licht je antwoord toe.

Bij **vraag 12** werd gevraagd na te denken over een ander aspect rond cirkels, te weten het aantal keren dat de hoogte van een specifieke kruk/tafel past in de omtrek van de virtuele cirkel die ontstaat bij het ronddraaien van die liggende kruk/tafel. Daarbij was het nodig de afmetingen van de bijbehorende cirkelbladen en de hoogte van de kruk te bepalen. Uiteraard hebben wij dat nauwkeurig gedaan: de gemeten hoogte is 112 cm, de tafeldiameter is 60 cm en de diameter van het bodemsegment is 42 cm. Op basis van deze gegevens is de omtrek ongeveer 2346 cm en daarmee wordt de betreffende verhouding ongeveer 20,9 en het juiste antwoord wordt antwoord e*) meer dan 17 keer de hoogte van de kruk*. Voor velen was het tijd om naar de lezing van Alexander Rinnooy Kan te luisteren, deze vraag werd nog maar door een enkeling beantwoord.

Twee spiegels

In een van de kleedkamers hangen twee spiegels tegenover elkaar. En er hangen tl-buizen aan het plafond. Als je in een spiegel kijkt, zie je verschillende spiegelbeelden van een en dezelfde tl-buis. Die verschillende spiegelbeelden van dezelfde buis zijn niet evenwijdig. Je kunt je de vraag stellen waardoor dit veroorzaakt wordt.

13

kleedkamer

a) de tl-buis zelf hangt niet netjes horizontaal
b) de spiegels hangen niet evenwijdig ten opzichte van elkaar: een van de twee is gedraaid om een verticale as
c) de spiegels hangen niet evenwijdig ten opzichte van elkaar: een van de twee is gedraaid om een horizontale as
d) een combinatie van ten minste 2 van de 3 bovenstaande mogelijkheden

Kies het juiste antwoord en licht je antwoord toe.

Vraag 13 ging over een tweetal spiegels in een van de kleedkamers. Of daar veel wiskundewandelaars zijn geweest, is onduidelijk maar het probleem kon ook zonder lokaalinspectie begrepen worden. De vraag was na te gaan hoe het feit dat verschillende 'generaties' weerspiegelingen van die ene tl-buis niet evenwijdig aan elkaar zijn, veroorzaakt kan worden. Het meerkeuze-aspect bevatte eigenlijk een instinker: er waren meer keuzes als juist aan te merken. Zolang antwoord b maar bij de mogelijkheden zit, is de niet-evenwijdigheid mogelijk. Daarmee zijn antwoord b) *de spiegels hangen niet evenwijdig ten opzichte van elkaar: een van de twee is gedraaid om een verticale as* en antwoord d) *een combinatie van ten minste 2 van de 3 bovenstaande mogelijkheden* als mogelijke juiste antwoorden aan te merken. Bij het inventariseren van de antwoorden van deze vraag was overigens al goed te merken dat de vermoeidheid toe sloeg c.q. deelnemers veelal geen tijd meer hadden om zich te verdiepen in het schrijven van toelichtingen: die toelichtingen waren hier mondjesmaat. Dat antwoord b) de crux was bij het niet-evenwijdig zijn, is gelegen in het feit dat bij die draaiing om die verticale as, die gedraaide spiegel aan de ene kant verder weg ligt van de andere spiegel dan aan de andere kant. In de weerkaatsing ligt daarmee een kant van de 2e generatiespiegeling van die tl-buis verder weg van de kijker dan de andere kant en dat veroorzaakt het niet-evenwijdig zijn want dat geldt niet voor de 1e-generatie spiegeling.

Per trein en/of te voet

Als je van Utrecht naar Hilversum met de trein reist en het laatste stukje vanaf het station naar Gooiland te voet aflegt, heb je de keuze om bij Hilversum Sportpark uit te stappen en dan te lopen of door te rijden tot Hilversum Centraal en een stukje terug te wandelen. Marian en Anne lopen precies even snel en vertrekken samen uit Utrecht. Anne stapt op Sportpark uit en wandelt naar Gooiland. Marian blijft zitten en na exact 1 minuut rijdt de trein verder tot Centraal. Daarna wandelt Marian naar Gooiland. Annes wandeling duurt vier keer zo lang als de wandeling van Marian. Ze komen exact tegelijkertijd bij Gooiland aan. De treinafstand Sportpark-Centraal is het dubbele van de wandelafstand Sportpark-Gooiland.
Hoe lang duurde de wandeling van Marian als je bovendien nog weet dat de trein met een gemiddelde snelheid reed tussen Sportpark en Centraal die het drievoudige was van de wandelsnelheid?

14

Wandeltijd Marian: ...... minuten

Licht je antwoord toe.

Vraag 14 was qua context een vraag die misschien beter direct aan het begin van de wandeling had kunnen staan omdat het hier ging om de mogelijke wandelingen vanaf de twee relevante Hilversumse NS-stations richting Gooiland. Er was het een en ander gegeven over verhoudingen tussen afstanden en tijden en met die gegevens was uit te rekenen dat de wandeltijd van de in de context opgevoerde Marian precies 3 minuten was. Dat in de uitnodiging voor het feestgebeuren

deze wandeltijd als 10 minuten werd vermeld, was natuurlijk verwarrend maar wij hadden als samenstellers van de wiskundewandeling geen idee van het wandeltempo waarop het bestuur van de NVvW ons had ingeschat. Overigens hebben we niet de indruk dat de meeste wiskundewandelaars last hebben gehad van het kennelijk niet zo realistische contextje alhier (de fanatieke smartphone gebruiker werd door OV9292 geleid naar het wellicht enige juiste antwoord). Het wiskundeprobleem kon trouwens op verschillende manieren worden opgelost, zo konden we uit de ingeleverde uitwerkingen constateren. Sommigen verdiepten zich in het opstellen van enkele vergelijkingen en anderen leefden zich uit in verhoudingsaspecten.

In totaal waren er 21 ingeleverde antwoordbladen. Het merendeel van de deelnemers bleek in duovorm hieraan gewerkt te hebben. Waaronder zelfs - in lijn met de 'een-tegen-allen'-quiz van de NVvW-Mariannes eerder die dag een enkel voordeurdelerspaar. Zoals al bij de prijsuitreiking vermeld, had het winnende paar 9 van de 14 vragen juist beantwoord, uitgaande van het behoorlijk soepele correctiemodel.. Ook vanaf deze plek nogmaals van harte gefeliciteerd hiermee natuurlijk.

Wij hebben als samenstellers van deze wiskundewandeling niet de illusie dat we hier de ultieme wiskundewandeling gecreëerd hebben. Na afloop van de beoordeling van de verschillende inzendingen constateren we dat een enkele aanscherping deze of gene vraag beter uit had doen komen. We hopen vooral dat deze verzameling vragen als inspiratiebron kan dienen om te laten zien dat er in nagenoeg iedere omgeving wel een aanleiding gevonden kan worden om daar met een wiskundig georiënteerde bril naar te kijken. En zo nieuwe mogelijkheden aangeboord worden om in ons onderwijs de leerlingen te blijven fascineren met uitdagende problemen.

Mocht deze wandeling of dit artikel aanleiding zijn om zelf een dergelijke tocht te ontwerpen dan is het misschien een idee om daar bij Euclides of op de vernieuwde site van de NVvW structureel aandacht aan te geven.

Joke Daemen is lerarenopleider wiskunde bij de Universiteit Utrecht

Peter Kop is docent wiskunde en lerarenopleider bij de Universiteit Leiden

Ger Limpens is toetsdeskundige bij Cito

Marcel Voorhoeve is docent wiskunde en schoolleider in Utrecht.

E-mailadressen: J.W.M.J.Daemen@uu.nl; KopPMGM@iclon.leidenuniv.nl; ger.limpens@gmail.com; marcel.voorhoeve@gmail.com